Fliegende Cops: Charakterisierung der Baumweite

Tobias Diez, Kathlén Kohn

Universität Leipzig, Universität Paderborn

Das Spiel

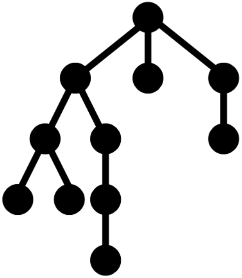
- endlicher, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- alle Teilnehmer sehen sich
- 1 Räuber:
  - befindet sich auf Knoten
  - bewegt sich entlang Kanten mit großer Geschwindigkeit
- $k - 1$ Polizisten
  - befinden sich auf Knoten oder in Helikopter
  - können sich nur von Knoten zum Helikopter oder vom Helikopter zu je einem Knoten bewegen

Das Spiel

- In Runde i wählen Polizisten $X_i \subseteq V, |X_i| < k$
  - $X_0 = \emptyset$
  - $X_{i-1} \subseteq X_i$ oder $X_i \subseteq X_{i-1}$
- In Runde i wählt Räuber einen X_i-flap $R_i \subseteq V$: Knotenmenge einer Komponente von $G \setminus X_i$
  - $R_i \subseteq R_{i-1}$ oder $R_{i-1} \subseteq R_i$
- Polizisten gewinnen, falls $R_{i-1} \subseteq X_i$

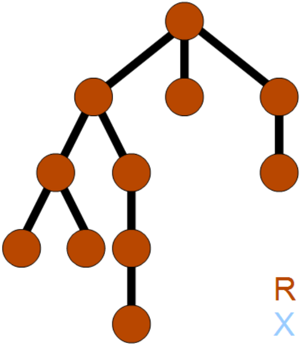
Übung 1

1. Wie viele Polizisten sind nötig, um den Räuber zu fangen?

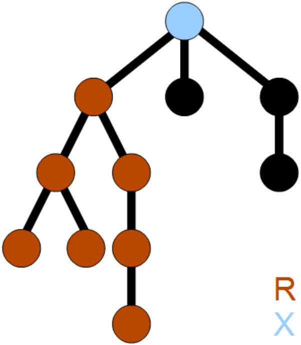


2. Was gilt allgemein für Bäume?

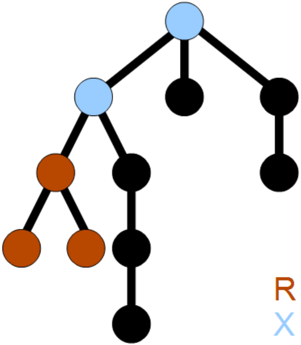
Strategie für Bäume



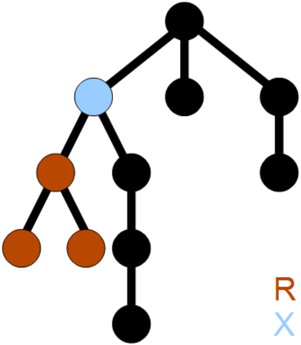
Strategie für Bäume



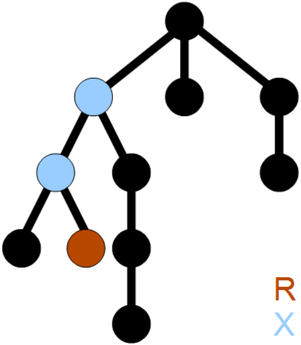
Strategie für Bäume



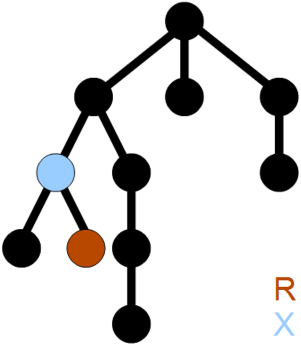
Strategie für Bäume



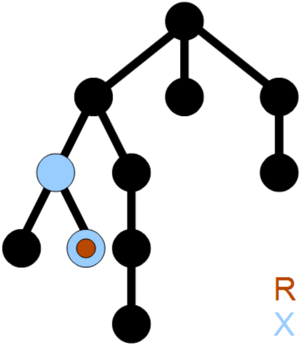
Strategie für Bäume



Strategie für Bäume



Strategie für Bäume



Graphensuche

- $< k$ Polizisten können Graph durchsuchen
  $:\Leftrightarrow < k$ Polizisten können Räuber fangen
- $< k$ Polizisten können Graph monoton durchsuchen
  $:\Leftrightarrow < k$ Polizisten können Graph durchsuchen, so dass für alle $i \leq i‘ \leq i“$ gilt: $X_i \cap X_{i“} \subseteq X_{i‘}$

Satz

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.

$< k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen

Graphensuche

- $X, Y \subseteq V$ berühren sich, falls $X \cap Y \neq \emptyset$ oder $\exists x \in X, y \in Y : \{x, y\} \in E$
- $< k$ Polizisten können Graph mit Sprüngen durchsuchen, falls sie Räuber fangen unter folgender Spieländerung:
  - Polizisten wählen $X_i \subseteq V, |X_i| < k$ beliebig
  - Räuber wählt X_i-flap $R_i \subseteq V$, der R_{i-1} berührt

Übung 2

Begründe: Wenn $< k$ Polizisten einen Graph durchsuchen können, so können $< k$ Polizisten den Graphen mit Sprüngen durchsuchen.

Satz

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.

$< k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen

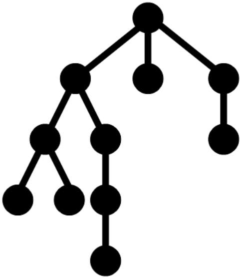
Hafen der Ordnung k

$\beta : \{X \subseteq V \mid |X| < k\} \to 2^V$ mit:

- $\beta(X)$ ist X-flap
- $\forall X, Y \subseteq V, |X| < k, |Y| < k : \beta(X)$ berührt $\beta(Y)$

Übung 3

1. Finde Hafen der Ordnung 2:



2. Zeige: Hat Graph G einen Hafen der Ordnung $\geq k$, so können $< k$ Polizisten G nicht mit Sprüngen durchsuchen.

Satz

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.

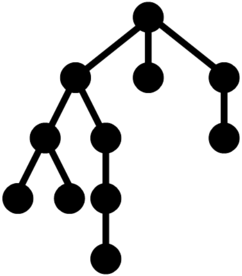
G hat Hafen der Ordnung $\geq k$
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Rightarrow < k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen

Screen

- $S \subseteq 2^V$, so dass für alle $H \in S$ gilt:
  - $H \neq \emptyset$
  - H ist in G verbunden
  - H berührt alle anderen $H' \in S$
- Screen S hat Dicke k, falls es kein $X \subseteq V$ gibt, so dass $|X| < k$ und $\forall H \in S : X \cap H \neq \emptyset$

Übung 4

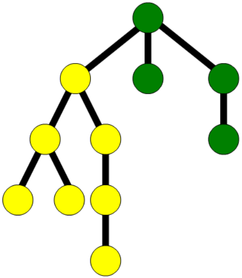
1. Finde einen Screen der Dicke 2:



2. Gibt es einen Screen der Dicke 3?

Übung 4

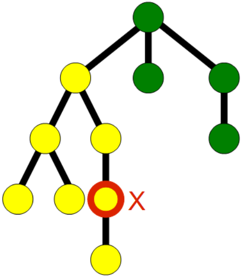
1. Finde einen Screen der Dicke 2:



2. Gibt es einen Screen der Dicke 3?
   Nein!

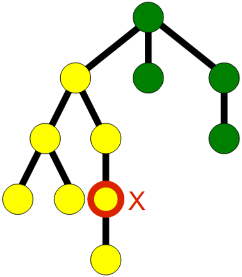
Zusammenhang: Screen - Hafen

Sei S Screen der Dicke $\geq k$ in G und $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.



Zusammenhang: Screen - Hafen

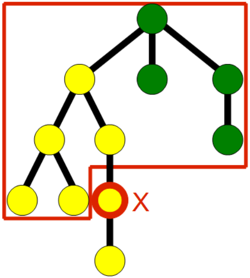
Sei S Screen der Dicke $\geq k$ in G und $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.



$\Rightarrow \exists H \in S : X \cap H = \emptyset$

Zusammenhang: Screen - Hafen

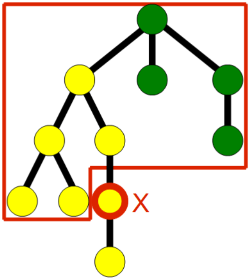
Sei S Screen der Dicke $\geq k$ in G und $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.



$\Rightarrow \exists H \in S : X \cap H = \emptyset$
$\Rightarrow \beta(X)$ sei X-flap, der H enthält

Zusammenhang: Screen - Hafen

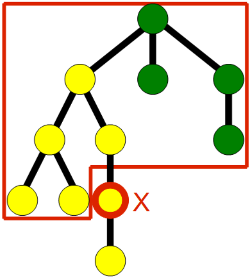
Sei S Screen der Dicke $\geq k$ in G und $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.



$\Rightarrow \exists H \in S : X \cap H = \emptyset$
$\Rightarrow \beta(X)$ sei X-flap, der H enthält
$\Rightarrow \beta$ ist Hafen der Ordnung $\geq k$ in G.

Zusammenhang: Screen - Hafen

Sei S Screen der Dicke $\geq k$ in G und $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.



$\Rightarrow \exists H \in S : X \cap H = \emptyset$
$\Rightarrow \beta(X)$ sei X-flap, der H enthält
$\Rightarrow \beta$ ist Hafen der Ordnung $\geq k$ in G.

(Übung: Konstruktion von Screen der Dicke $\geq k$ aus Hafen der Ordnung $\geq k$.)

Satz

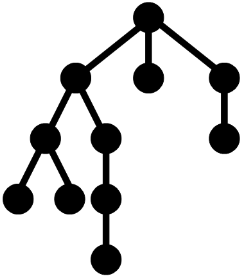
Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.
G hat Screen der Dicke $\geq k$
$\Rightarrow$ G hat Hafen der Ordnung $\geq k$
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen

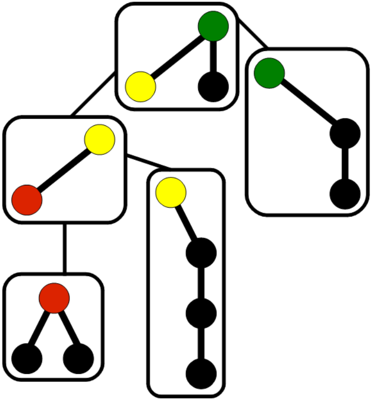
Baum-Dekomposition

(T, W) mit T Baum und $W = \{W_t \subseteq V(G) \mid t \in V(T)\}$ sowie

- $\bigcup_{t \in V(T)} W_t = V(G)$
- $\forall \{x, y\} \in E(G) \, \exists t \in V(t) : x, y \in W_t$
- Wenn $t, t`, t`` \in V(T)$ und $t`$ liegt auf Pfad von $t$ zu $t``$, dann $W_t \cap W_{t``} \subseteq W_{t`}$

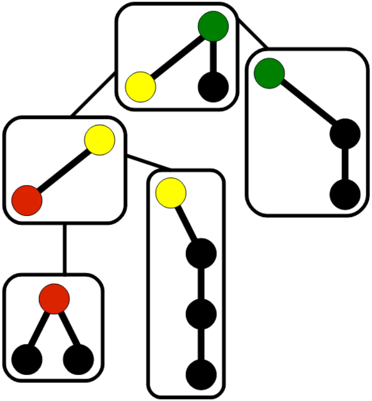
Baum-Dekomposition





Weite einer Baum-Dekomposition

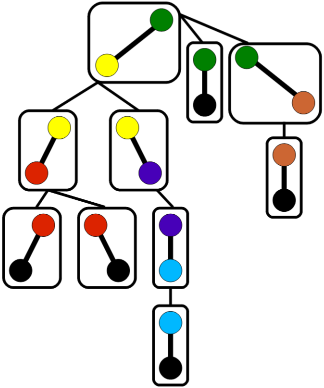
$$\max\{|W_t| - 1 \mid t \in V(T)\}$$



Weite: 3

Baumweite eines Graphen G

Minimale Weite einer Baum-Dekomposition von G

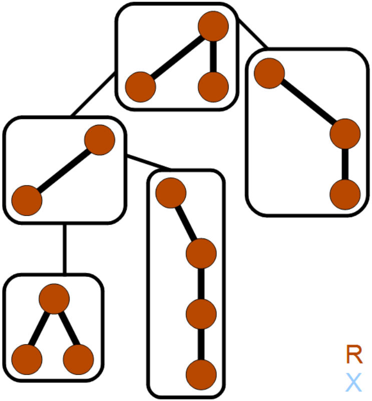


Baumweite: 1

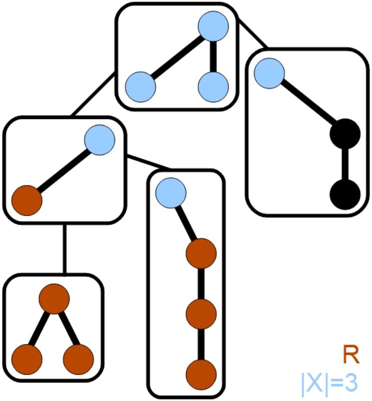
Übung 5

Zeige: Wenn die Baumweite von G kleiner als $k - 1$ ist, so können $< k$ Polizisten G monoton durchsuchen.

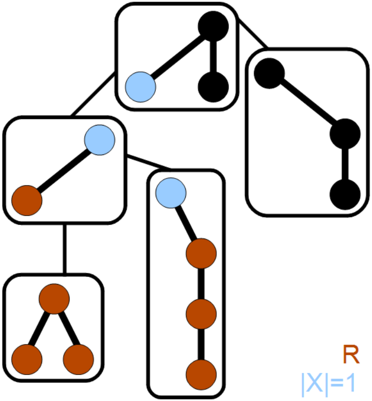
Strategie bei Baum-Dekomposition



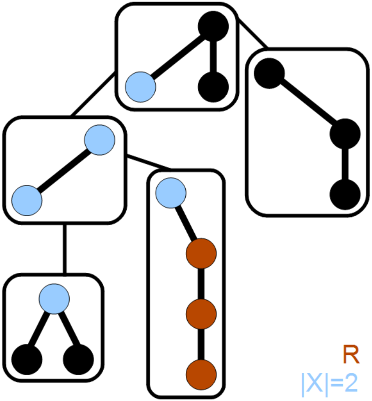
Strategie bei Baum-Dekomposition



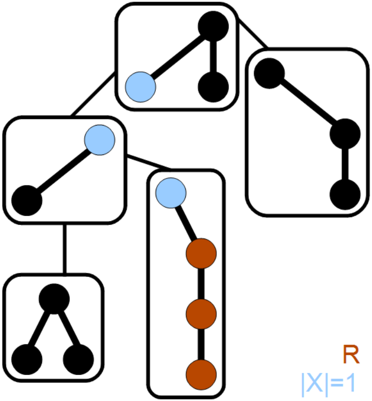
Strategie bei Baum-Dekomposition



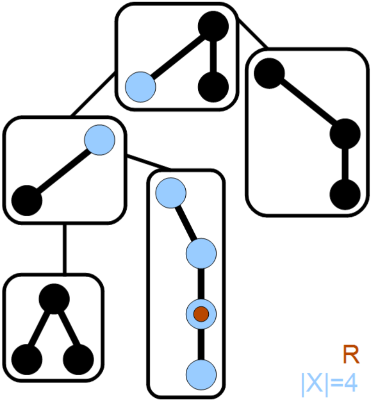
Strategie bei Baum-Dekomposition



Strategie bei Baum-Dekomposition



Strategie bei Baum-Dekomposition



Satz

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.
G hat Screen der Dicke $\geq k$
$\Rightarrow$ G hat Hafen der Ordnung $\geq k$
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Rightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen
$\Rightarrow$ Baumweite von G ist $\geq k - 1$

Satz (vollständig)

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.
G hat Screen der Dicke $\geq k$
$\Leftrightarrow$ G hat Hafen der Ordnung $\geq k$
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen
$\Leftrightarrow$ Baumweite von G ist $\geq k - 1$

Satz (vollständig)

Seien $G = (V, E)$ Graph und $k \in \mathbb{N}$.
G hat Screen der Dicke $\geq k$
$\Leftrightarrow$ G hat Hafen der Ordnung $\geq k$
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht mit Sprüngen durchsuchen
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht durchsuchen
$\Leftrightarrow$ $< k$ Polizisten können G nicht monoton durchsuchen
$\Leftrightarrow$ Baumweite von G ist $\geq k - 1$

Noch zu zeigen:
Baumweite von G ist $\geq k - 1$ impliziert, dass G Screen der Dicke $\geq k$ hat.
Also: G hat keinen Screen der Dicke $\geq k$ impliziert, dass Baumweite von G kleiner als $k - 1$ ist.

Beweisidee

Zeige: Seien S Screen in G und $k \in \mathbb{N}$. Wenn kein Screen S' in G mit $S \subseteq S'$ und Dicke $\geq k$ existiert, dann hat G eine Baum-Dekomposition (T, W), so dass für jedes $t \in V(T)$ mit $|W_t| \geq k$ gilt: $\deg(t) = 1$ und $\exists H \in S : W_t \cap H = \emptyset$.

Gewünschte Aussage folgt für $S = \emptyset$.